Il Piccolo Principe e i tramonti

Andrea Paolini

8 aprile 2022
20 giugno: seconda revisione corretta e ampliata
6 luglio: terza revisione rivista con finale da favola
31 agosto: quarta revisione corretta sempre con finale da favola

Una favola con l'astronomia dentro

Antoine de Saint-Exupéry era aviatore e infatti si nota nella favola la sua intenzione di mostrare le sue conoscenze astronomiche.

Egli parla di tramonti, e racconta che sul suo asteroide[1] il "piccolo"[2] principe può vedere "il" tramonto "in anticipo" semplicemente spostando la sedia [con una componente verso est], e che, addirittura, egli può vedere quanti tramonti[3] vuole spostandola ogni volta in direzione opposta[4] [verso ovest].

Il piccolo principe e i tramonti (e le albe)

Ciò che Saint-Exupéry ci vuol far notare, raccontandoci degli spostamenti del piccolo principe sul suo pianetino, è che il movimento relativo del Sole è qualcosa di *percepito dall'osservatore*, al quale quindi egli osservatore contribuisce con il proprio spostamento:

1 L'asteroide B612 appartiene al "reame" della favola: «poco più grande di una casa» quindi non osservabile dalla Terra, ma Saint-Exupéry fa raccontare all'aviatore la storia della sua scoperta, eccetera. Tuttavia, per aiutarci nelle nostre divagazioni tra favola e realtà, scegliamo come "ponte" tra la Terra e il minuscolo pianetino disegnato da Saint-Exupéry, l'asteroide reale 612 Veronika che ha in comune il numero 612 (gli asteroidi (reali) sono designati solo da un numero, senza lettera davanti). Il suo fascino, oltre che al numero in comune, è che, scoperto nel 1906 (tre anni prima che quello della favola), non è stato più visto fino a molto tempo dopo la morte di Saint-Exupéry, conciliandosi con il mistero che avvolge la scomparsa del piccolo principe. 612 Veronika fa parte della fascia principale. Attingendo ai dati più recenti, esso risulta avere un diametro di circa 38 km.

2 Il principe non è affatto "piccolo" se confrontato con il suo minuscolo "pianetino", ed è proprio in virtù di ciò che egli può lassù sperimentare, in modo amplificato rispetto a quanto avviene sulla Terra, gli effetti sui tramonti analizzati nel seguito.

3 E' improprio usare le espressioni: "anticipare" e "rivedere" "il" tramonto, perché ogni tramonto, come qualsiasi altro evento, è qualcosa di irripetibile (spazio e tempo portano a variazioni dell'orizzonte, delle condizioni atmosferiche (laddove vi sia atmosfera), ecc.).

4 A pagina 34 della traduzione italiana nei tascabili Bompiani, 1994.

come caso limite, su un pianeta che non ruota né rivoluziona (ossia che è fermo rispetto al Sole) si potrebbe far muovere il Sole semplicemente spostandosi[5] [6].

Se, per far piacere al piccolo principe, focalizziamo la nostra analisi solo sui tramonti (e le albe), dobbiamo notare che, oltre agli spostamenti "orizzontali" (ad altitudine costante), hanno, in questo caso, una forte influenza le variazioni di "altitudine"[7] [8], e difatti, come sanno gli appassionati di astronomia, non bastano latitudine e longitudine per stimare con sufficiente precisione l'ora del tramonto (e dell'alba). Questo perché, appunto, l'orizzonte non è "geometrico"[9], ma "reale": l'ellissoide di riferimento o qualunque ostacolo (naturale o artificiale)[10]. Il movimento *verticale* dell'osservatore rispetto al pianeta/ostacolo cambia la posizione dell'orizzonte, quindi solo l'ora di alba e tramonto: le coordinate topocentriche del Sole sono in genere invece ottimamente determinate dalle sole latitudine e longitudine, avendo l'altitudine in questo caso un'influenza del tutto trascurabile[11] [12].

Tutto ciò è funzione delle *velocità* relative, quindi, in particolare per albe e tramonti, non contano semplicemente le dimensioni del pianeta e dell'osservatore, ossia non basta l'analisi statica di Saint-Exupéry, anche se il fatto che il piccolo principe non sia affatto piccolo rispetto al suo pianetino, fa ben sperare che anche la sua velocità di spostamento possa essere sufficiente a permettergli di sdilinquirsi in tramonti con frequenza più che giornaliera.

---

5 Ossia generare un movimento apparente del Sole. O, viceversa, si potrebbe fermare il Sole. Che l'osservatore possa essere l'artefice di ciò che osserva, che possa addirittura "far muovere il Sole", e quindi interferire sulla ciclicità dei tramonti, è constatazione scientifica che sa di favola, e di cui Saint-Exupéry difatti si è servito. Ma questo ci induce a pensare che anche qui, su questa grande Terra, possiamo noi pure sentirci piccoli principi, anzi piccolissimi principi; ed infatti, come vedremo, è proprio così.
Alle considerazioni puramente cinematiche, dovremmo aggiungere le conseguenze dinamiche della massa dell'osservatore, fermo o in movimento, trascurabili nel caso della Terra, ma *probabilmente* no nel caso della favola, ma *di sicuro* il pianetino B612 ha una densità altissima!

6 La velocità dell'osservatore, se la riferiamo alla superficie del pianeta, può essere scomposta in una componente parallela alla superficie dell'ellissoide di riferimento (velocità tangenziale, di traslazione) - la quale può essere, a sua volta, scomposta in una componente lungo il parallelo locale (direzione E-O) (ossia lungo la direzione di rotazione propria del pianeta) e una lungo il meridiano locale (N-S) - ed una componente ad essa ortogonale (velocità radiale, di ascensione/discensione), entrambe le quali contribuiscono alla variazione della velocità *effettiva* (quella *percepita* dall'osservatore). Nel seguito, per semplicità, analizzeremo i due contributi separatamente. Nella realtà invece, se, per esempio, ci spostiamo lungo la superficie del pianeta, non lo faremo mai seguendo un percorso perfettamente piano (con altitudine costante).

7 Sul pianetino del piccolo principe queste variazioni, in particolare, sono ancor più interessanti perché l'altezza del piccolo principe è grande rispetto al raggio. Qui, a maggior ragione, è l'altitudine calcolata dall'occhio dell'osservatore a contare (nel seguito intenderemo con altitudine quella calcolata all'occhio dell'osservatore).

8 Se il tramonto è riferito a un orizzonte che si muove al variare dell'altitudine e che è legato alla curvatura del pianeta, come quando l'orizzonte è l'ellissoide di riferimento (sul mare, solo nel caso terrestre, o su una estesa pianura), allora l'ora del tramonto è anche strettamente legata al raggio del pianeta, quindi a una sua caratteristica morfologica (si vedano le formule nel seguito, e, per contro, l'*Addendum*). Vi è anche l'influenza della rifrazione atmosferica: essa è massima all'alba e al tramonto, e aumenta con l'altitudine di osservazione.

9 L'orizzonte geometrico corrisponde all'equatore celeste (e non considera la rifrazione), ed è quello rispetto a cui si misura l'altezza del Sole. Le sfere armillari sono appoggiate su un orizzonte piatto per tale motivo, per cui, ai fini dell'ora di alba e tramonto, si può dire che esse rappresentano solo il caso di altitudine = 0 m.

10 La differenza in altitudine tra osservatore e ostacolo definisce l'angolo di cut-off dell'altezza del Sole. Esso può essere zero, positivo o negativo.

11 In particolare, l'ora del mezzodì rimane praticamente invariata.

12 Si noti che, se ci si muove (in generale: "orizzontalmente" e "verticalmente") non si modifica soltanto l'ora di alba e tramonto (e quindi, eventualmente, anche la loro frequenza), ma, se lo si fa *durante* il loro svolgimento, anche la loro durata, si veda oltre.

Il piccolo principe cammina, o al più corre (per noi è molto arduo poter fare lo stesso sul nostro pianeta)

Per vedere più di un tramonto, il piccolo principe sposta la sedia[13], ma, come osservato, non basta spostarsi di posto, bisogna farlo con una certa velocità minima.

Partiamo dall'espressione generale per la variazione dell'altezza del Sole a seguito di una generica velocità dell'osservatore (con componente sia "orizzontale" che "verticale")[14]:

$\Delta h_{Sole}(\delta_{Sole}$, raggio pianeta, rifrazione) =

$$\int_{t1}^{t2} [(\frac{v_{oss.,\,lungo\,parallelo}}{d(s)} - \omega_{Sole,\,asse\,pianeta}) \cdot (\partial h_{Sole} / \partial A_{Sole}) + \frac{v_{oss.,\,lungo\,meridiano}}{d(s)} \cdot (\partial h_{Sole} / \partial lat.) + v_{oss.,\,lungo\,raggio} \cdot (\partial h_{Sole} / \partial alt.)] \cdot dt \quad (0)$$

dove δ_{Sole} è la declinazione del Sole, *s* è il percorso scelto (esprimibile in funzione di: lat., long., alt.), d(*s*) la sua distanza dall'asse di rotazione del pianeta, $\omega_{Sole,\ asse\ pianeta}$ la velocità angolare di rotazione del Sole intorno all'asse del pianeta, qui positiva (nel caso della Terra vale circa 15°/h = 0,2618 rad/h, per 612 Veronika 45°/h = 0,7854 rad/h) per cui $v_{oss.,\ lungo\ parallelo}$ è positiva se verso ovest, e A_{Sole} è l'angolo orario del Sole (equivalente all'ora solare vera, ossia al tempo locale). Nel caso della Terra h_{Sole} , e quindi Δh_{Sole} , dipende anche dalla rifrazione atmosferica.[15]

Poniamo ora la velocità "verticale" (lungo il raggio) nulla, perché analizzeremo in questa prima parte una velocità puramente "orizzontale" (con altitudine = costante)[16]: la dipendenza dal raggio del pianeta scompare. Si ottiene:

$$\Delta h_{Sole}(\delta_{Sole}, \text{rifrazione}) = \int_{t1}^{t2} [(\frac{v_{oss.,\,lungo\,parallelo}}{d(s)} - \omega_{Sole,\,asse\,pianeta}) \cdot (\partial h_{Sole} / \partial A_{Sole}) + \frac{v_{oss.,\,lungo\,meridiano}}{d(s)} \cdot (\partial h_{Sole} / \partial lat.)] \cdot dt \quad (1)$$

13 Con una componente verso ovest.

14 L'espressione seguente evidenzia solo i vari contributi alla variazione di h_{Sole} in seguito a $\mathbf{v}_{osservatore}$, dovuti a cambiamenti di ora, latitudine, altitudine. Essi non vengono esplicitati per non introdurre espressioni complesse. Negli esempi più oltre si è fatto uso di una applicazione che stima in modo accurato h_{Sole}: JPL Horizons, *https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html*.

15 La formula è molto debolmente influenzata dal moto di rivoluzione, sia nel caso di 612 Veronika (il suo periodo di rivoluzione è di circa 5,5 anni) che anche in quello della Terra (per la quale $\omega_{Sole,\ asse\ pianeta}$ è circa uguale a $\omega_{pianeta,\ asse\ pianeta}$).

16 Si noti che la velocità dell'osservatore lungo la superficie del pianeta (in generale aventi variazioni di altitudine) non ha norma euclidea. Le coordinate del Sole invece, ovviamente (qui in particolare l'altezza) hanno norma euclidea rispetto alle componenti di tale velocità, da cui le derivate parziali nella (0) e seguenti.

Se vogliamo vedere un tramonto completo al nostro arrivo, dopo averne visto uno prima della partenza, Δh_{Sole} deve essere uguale ad almeno l'altezza del diametro del disco solare[17], quindi dobbiamo aggiungere la seguente condizione:

$$\Delta h_{Sole}(\delta_{Sole}, \text{rifrazione}) > \text{altezza diametro}_{\text{disco solare}} \qquad (1\ \text{bis})$$

Come si evince dalla formula (1), la situazione è complicata perché l'altezza del Sole dipende, oltre che dall'ora solare vera (l'angolo orario del Sole), anche da latitudine e declinazione del Sole (data). In generale, se si riesce a rivedere il Sole con la stessa altezza, h_{Sole}, il suo angolo azimutale risulta diverso, quindi non siamo tornati indietro alla stessa posizione del Sole[18]. Ma, nel caso particolare di percorso lungo un parallelo (d(*s*) = costante), ciò può avvenire perché varia solo l'angolo orario del Sole; il guadagno sull'altezza del Sole si semplifica perché vi è solo più il contributo dovuto alla dipendenza dall'angolo orario del Sole:

$$\Delta h_{Sole}(\delta_{Sole}, \text{rifrazione}) = \frac{1}{d(\text{lat.}=\text{cost.})}\int_{t1}^{t2}\left(v_{\text{oss., lungo parallelo}} - d(\text{lat.}=\text{cost.})\cdot\omega_{\text{Sole, asse pianeta}}\right)\cdot\left(\partial h_{Sole}/\partial A_{Sole}\right)\cdot dt \qquad (1\ \text{ter})$$

dove, di nuovo, si usa di solito la condizione aggiuntiva:

$$\Delta h_{Sole}(\delta_{Sole}, \text{rifrazione}) > \text{altezza diametro}_{\text{disco solare}} \qquad (1\ \text{quater})$$

Nel caso che ci interessa di guadagno ($\Delta h_{Sole} > 0$) possiamo interpretare la (1 ter) in questo modo: la velocità dell'osservatore lungo il parallelo deve avere un valor medio minimo, il quale dipende dalla velocità tangenziale del pianeta lungo il parallelo e quindi dalla latitudine del percorso; ponendo $\Delta h_{Sole} = 0$ lo possiamo definire:

$$v_{\text{oss., lungo parallelo., media, min.}} = d(\text{lat.} = \text{cost.}) \cdot \omega_{\text{Sole, asse pianeta}} \qquad (1\ \text{quinquies})$$

Se $v_{\text{oss., lungo parallelo, media}}$ è maggiore di $v_{\text{oss., lungo parallelo, media, min.}}$ allora si può "tornare indietro" rispetto all'ora del tramonto già avvenuto. Calcoliamo il conseguente guadagno temporale:

$$\Delta t_{\text{ora tramonto}} = \int_{t1}^{t2}\left(v_{\text{oss., lungo parallelo}} - d(\text{lat.}=\text{cost.})\cdot\omega_{\text{Sole, asse pianeta}}\right)\cdot dt \qquad (1\ \text{sexies})$$

Se vogliamo vedere un tramonto aggiuntivo completo, questo vantaggio temporale deve essere almeno maggiore della durata del tramonto, $\tau_{tramonto}$, la quale dipende dalla latitudine (è minima all'equatore), dalla declinazione del Sole (con un minimo intorno agli equinozi), dalla rifrazione atmosferica (qualora presente) e dall'altezza del diametro del disco solare, quindi dobbiamo aggiungere la condizione seguente:

---

17 Per durata del tramonto del Sole intendiamo, anche sulla Terra, la semplice durata della sparizione del disco solare, crepuscolo escluso, per renderla applicabile anche ai pianeti privi di atmosfera.

18 Non si riesce quindi a tornare indietro nel "tempo segnato dal Sole", quello letto dagli orologi solari (l'ora solare vera).

$\Delta t_{ora\ tramonto} > \tau_{tramonto}$ (1 septies)

Nel caso invece si voglia solo vedere un tramonto prima dell'"ora prestabilita", ci si può spostare con una velocità a piacere[19], anche piccola; tuttavia, per esempio nel caso particolare di movimento lungo un parallelo, essa deve comunque essere confrontabile con la $v_{oss,\ lungo\ parallelo,\ media,\ min.}$ (1 quinquies) affinché l'anticipo sia apprezzabile.

Analizziamo ora, nello specifico, il caso dell'asteroide 612 Veronika, ma anche quello, più interessante per noi, della Terra, con il fine di conseguire gli scopi sopra descritti: vedere uno o più tramonti addizionali nella giornata, oppure anticiparne l'ora[20].

- *Tramonti multipli:*

Consideriamo il caso in cui il piccolo principe sposti indietro la sedia seguendo un percorso equatoriale[21] (verso ovest).

- Per 612 Veronika[22], inserendo nella (1 quinquies) d(latitudine = 0°) = 19 km per B6, e 8 ore per il periodo rotazionale, il piccolo principe deve correre con una velocità media di alme-

19 Adesso con una componente verso est.

20 NOTA IMPORTANTE: Per stimare l'anticipo, o la possibilità di tramonti multi-giornalieri, occorre valutare dei delta-tempi tra tramonti, per i quali occorre definire gli orizzonti di riferimento, che in generale hanno differente latitudine, longitudine e altitudine. Per esempio, nei seguenti esempi numerici relativi a velocità puramente "orizzontali", per entrambi i tramonti l'orizzonte è quello "standard" costituito dall'ellissoide di riferimento, per cui esso si sposta ("orizzontalmente") di quanto si sposta l'osservatore (si allontana se saliamo di quota) (sul pianeta Terra ciò approssima bene i casi in cui entrambi i tramonti avvengano sul mare; per l'asteroide 612 Veronika, invece, l'approssimazione vale se i due tramonti avvengono entrambi rispetto ad orizzonti con angolo di cut-off per l'altezza del Sole nullo, eventualità improbabile, vista le irregolarità della sua superficie) Per velocità puramente "verticali", nel paragrafo seguente, verrà preso come orizzonte sempre l'ellissoide di riferimento, che è di nuovo mobile (si allontana se saliamo di quota). Nell'*Addendum* invece un orizzonte con un'altitudine maggiore di zero, tale per cui esso non si muove.

Qui, sulla Terra, dove c'è rifrazione atmosferica, supponiamo che le condizioni atmosferiche non mutino né nel tempo (nell'intervallo tra i due tramonti), né spazialmente; supponiamo inoltre che, per fissarne il valore, esse corrispondano a quelle dell'atmosfera standard (10°C, 101kPa, 0% di umidità relativa (valore tuttavia poco rappresentativo dell'ambiente marino)), e che la luce sia gialla. Nella realtà, la variazione temporale delle condizioni atmosferiche nei brevi intervalli considerati è, con buona probabilità, bassa, tuttavia, sia nel caso della velocità "orizzontale" che nel caso della velocità "verticale", il tratto di atmosfera attraversato cambia (non solo per via dello spostamento dell'orizzonte di riferimento), per cui bisogna tenere conto anche di una variazione spaziale delle condizioni atmosferiche. Globalmente, anche quando gli orizzonti sono ben definiti (per esempio, almeno nel caso della Terra, si suppongono entrambi gli orizzonti sul mare), si prende comunque un margine ampio di tolleranza, di +/-0,3°, tenendo presente però che, come accennato, nel caso di 612 Veronika (e di B612!), non essendoci né il mare né pianure estese, questo margine, seppur non vi sia atmosfera, è difficilmente quantificabile.

Come già menzionato, non si scordi il fatto che ogni percorso reale non è mai puramente "orizzontale" o "verticale", quindi bisogna combinare le stime fatte qui per i singoli contributi.

21 Il percorso equatoriale è il meno favorevole, quindi quello da verificare.

22 Si veda Nota 1. h_{occhio} è qui trascurabile rispetto al raggio di 19 km.

no 15 km/h. Per rivedere il tramonto per intero, ipotizzando, per esempio, che egli corra (in media) a 17 km/h, dalle (1 sexies) e (1 septies) si ricava che egli dovrebbe farlo per almeno 1,67 minuti[23].

Ciò che capita nella favola avvererebbe quindi anche sul reale 612 Veronika, ma ci si dovrebbe affrettare parecchio, almeno all'equatore[24].

- Se invece vale il disegno di Saint-Exupéry, la sedia, *di sicuro* (siamo nella favola) permette di assistere a quanti tramonti si vuole, anche 43 in un giorno[25], come viene raccontato dal piccolo principe.

Ma vediamo cosa succede sul pianeta Terra. Cominciamo da un percorso equatoriale. Dalla (1 quinquies) si ottiene che la velocità media deve essere di almeno 1670 km/h[26], nella quale si deve comprendere anche il "decollo" e l'"atterraggio", dal momento che dobbiamo usare un aereo (ed un aereo moderno (supersonico), non dell'epoca di Saint-Exupéry)[27].

Se però abbandoniamo il percorso equatoriale, anche sul pianeta Terra potremmo, "in teoria", usare solo le nostre gambe, sebbene sia difficoltoso verificarlo, e lo si possa fare solo in determinati giorni dell'anno. Iniziamo con il scegliere un percorso a latitudini elevate, per esempio lungo un parallelo prossimo al circolo polare (per il momento, senza andare oltre, in modo da poter vedere il fenomeno qualsiasi giorno dell'anno)[28]: a 60° di latitudine la velocità media minima scende a 835 km/h[29]. Ma se ci avviciniamo sempre più al polo, diventa possibile, anche se solo più nei giorni intorno agli equinozi (o solo all'equinozio), far scendere tale velocità fino a quella del piccolo principe, ossia basta spostare la propria sedia[30]…

Vi è infine un fenomeno che, sebbene esaltato dalle dimensioni del suo minuscolo pianeta, non è solo appannaggio del piccolo principe: se ci si sposta lungo la direzione N-S con una

---

23 Per coprire i 0,5°/3 = 0,167° del diametro del disco solare visto da 612 Veronika (si veda Nota 52).

24 Si noti, per esempio, che se il piccolo principe corre verso ovest in discesa, il vantaggio aumenta per via del contributo favorevole dovuto alla velocità "verticale" (si veda più avanti).

25 La favola fa riferimento al "giorno", quindi anche nella favola il pianetino ha un moto di rotazione, per cui il piccolo principe deve regolare la sua velocità su di esso.

26 Tanto si procede più spediti di questa velocità e tanto prima si recupera (si vedano la (1 sexies) e la (1 septies)) la durata di un tramonto completo all'equatore: 2 minuti agli equinozi o 2,8 minuti ai solstizi.

27 Come postilla: dalla (1), quindi riferendosi ad un percorso generico con latitudine variabile (ossia con d(*s*) variabile), si può ottenere anche il valore della velocità media minima per guadagnare sull'ora locale (più grossolanamente: sul fuso orario, ossia sull'ora convenzionale): anche in questo caso con gli aerei di linea non si può guadagnare se si procede, verso ovest, in una fascia equatoriale, ma bisogna avvicinarsi al polo.

28 Oltre i circoli polari, il Sole, da un giorno fino a 6 mesi, non tramonta (Sole a mezzanotte) o non sorge (notte a mezzogiorno).

29 Approssimando: d(lat. = 60°) $\simeq$ (6373 km + 10 km) · cos(60°) = 3191,5 km; $v_{\text{oss, lungo parallelo., media, min}}$ = 3191,5 km · (2π rad / 24 h) = 835,5 km/h. Questa velocità minima può essere incrementata (in assoluto) anche di poco per riuscire a vedere, dopo un tempo ($t_2 - t_1$) ragionevolmente breve, un altro tramonto completo, visto che la durata del tramonto, alla latitudine di 60°, aumenta a 6 minuti agli equinozi, circa 9 minuti al solstizio invernale e 9,5 minuti a quello estivo.

30 Per vedere un tramonto completo dobbiamo metterci a latitudini minori di circa 90°- 0,5° = 89,5° (si noti che il tramonto al polo esatto non ha senso: il tramonto è definito in relazione alla giornata, mentre lì il Sole si alza e abbassa in più giorni, solo per via della variazione della sua declinazione [quindi stare su uno sgabello al polo e girare su se stessi non servirebbe]): se ci mettiamo a 89,4° di latitudine il giorno dell'equinozio, basta correre ad appena poco più dei 15 km/h minimi richiesti poiché, in teoria, per recuperare, abbiamo 6 ore di tempo (quanto dura il tramonto completo a quella latitudine, il giorno della sua durata massima), anche se correre per sei ore non è possibile.

velocità molto più alta della velocità lineare locale di rotazione del pianeta (quindi rimanendo circa sullo stesso meridiano)[31], si potrebbe *far* tramontare il Sole al proprio arrivo, quindi a nord (o a sud)! Sul suo piccolo pianeta il piccolo principe potrebbe (forse) addirittura partire dall'equatore, e, seguendo il meridiano, arrivare vicino ad uno dei due poli vedendo il Sole tramontare. Sulla Terra la velocità lineare di rotazione è bassa solo vicino ai poli, quindi si potrebbe spostare la sedia lungo il meridiano partendo da molto vicino al polo…

- *Anticipo dell'ora del tramonto:*

Prendendo come esempio ancora il caso più sfavorevole del percorso equatoriale (adesso verso est):

- Osserviamo, innanzitutto, che su 612 Veronika, "piccolo" ma ruotante vorticosamente, il piccolo principe, stando fermo, deve aspettare al massimo 8 ore per vedere un tramonto, e non 24 come sulla Terra. Ma se si sente particolarmente triste e ha bisogno di vederlo prima dell'ora stabilita, se sposta, la sedia, per esempio, camminando a 4 km/h per 1 minuto, egli vede il tramonto prima di 16 secondi (fatica forse sprecata, ma dipende da quanto fosse egli triste).

Sul suo pianeta grande come una casa sicuramente andrà meglio (altrimenti che favola sarebbe?).

- Sulla Terra, se si corre all'impazzata (a 20 km/h), e si riesce a farlo per 1 minuto, si guadagna meno di 1 secondo, ossia nulla di cui ci si possa accorgere, stremati, all'arrivo.

Ma il piccolo principe potrebbe anche solo abbassarsi o alzarsi (noi invece dobbiamo faticare, e avere pazienza)

Il piccolo principe, per vedere in anticipo *un* tramonto, potrebbe anche solo abbassarsi. Viceversa, semplicemente alzandosi un poco, potrebbe vederne un secondo, e, alzandosi poi ancora un po', un terzo, e così via, sempre facendolo con una certa velocità minima che dipende dalla velocità di rotazione del suo pianeta[32].

Per scoprire che cosa capita sulla Terra, cominciamo con alcuni esempi statici:

- Prendiamo come riferimento, quando ci troviamo ad altitudine zero, le ore di alba e tramonto rispetto ad un orizzonte con altitudine zero (il mare per esempio)[33], ad una certa data e latitudine.

31 Nella (1) l'angolo orario del Sole (l'"ora vera") rimane circa invariato, e cambia solo la latitudine.

32 Se come orizzonte si usa sempre lo sferoide di riferimento, come negli esempi precedenti e quelli successivi, c'è anche una dipendenza dal raggio del pianeta. In genere, invece, la dipendenza dalla velocità di rivoluzione intorno alla propria stella è trascurabile, mentre, qualora ci sia atmosfera, c'è anche la dipendenza dalla rifrazione.

33 In modo che il tramonto avvenga con il Sole il più basso possibile.

Notando che è determinante definire anche l'orizzonte che usiamo dopo che siamo saliti in quota, continuiamo a prendere lo sferoide di riferimento (altitudine zero, per esempio il mare)[34]:

- Spostiamoci in montagna[35] (per esempio a 1000 metri sul livello del mare): alba e tramonto[36] avvengono, rispettivamente, prima e dopo, di un lasso di tempo che, agli equinozi ($\delta_{Sole} = 0°$) (in prossimità dei quali il vantaggio risulta minimo) vale: circa 4 minuti all'equatore, 6 minuti alla latitudine di 45° (N o S) e 8 minuti alla latitudine di 60°.

- Salendo in alta quota (a 10000 metri sul livello del mare: sull'Everest o in aereo) alba e tramonto avvengono, sempre agli equinozi, prima e dopo di circa 13 minuti all'equatore, 18 minuti alla latitudine di 45°e 26 minuti alla latitudine di 60°[37]. Per dare un'idea dell'ulteriore variazione in funzione del giorno dell'anno, a 60° il vantaggio di 26 minuti agli equinozi sale a 37 minuti al solstizio invernale e a 53 minuti a quello estivo.

Quindi quando siamo in alto vediamo l'alba prima e il tramonto dopo, ovvero le ore di luce si allungano[38]. Come chiarito da questi esempi, sulla Terra il vantaggio non è ampio, anche per altitudini elevate, ma l'effetto è amplificato se il pianeta rimpicciolisce: su quello che Saint-Exupéry ha disegnato, il "piccolo" principe potrebbe vedere *quasi* sempre il Sole (tramonto e alba tenderebbero ad avvenire *quasi* contemporaneamente)[39].

---

34 Che ha raggio quadratico medio di 6373 km. E' questo il caso più sfavorevole, con l'orizzonte che si allontana quando saliamo di quota (si veda Nota 19). Omettiamo le formule che, anche per il caso statico, sarebbero complicate, per il fatto che quando ci si alza di quota non si ha soltanto un anticipo sul tramonto (quindi una variazione dell'altezza del Sole), ma (di conseguenza) anche una variazione dell'angolo azimutale del tramonto (come rimarcato nel seguito) (la variazione dell'ora del tramonto con l'altitudine dipende quindi sia dalla latitudine che dalla stagione). Di nuovo si farà uso dell'applicazione JPL Horizons, *cit.*.

35 In questa analisi puramente "verticale" si fa l'ipotesi che il punto in quota differisca per latitudine e longitudine in modo trascurabile rispetto alla località ad altitudine zero, condizione ben rispettata forse solo dalla mongolfiera (si veda più avanti). Tuttavia i disallineamenti in longitudine e latitudine portano, in genere, anche nel caso di ascese via terra in montagna, a differenze trascurabili sui tempi del tramonto.

36 Si noti che, fissando una distanza di visibilità massima di 60 km, se si supera l'altitudine di 250 metri, la linea dell'orizzonte sul mare o in pianura (a quota zero) non è più definibile, poiché sfuma a causa dello scattering atmosferico, e quindi alba e tramonto non avvengono più rispetto ad una linea netta. Un ulteriore aiuto alla quantificazione della "debole" curvatura terrestre può scaturire da questa osservazione: quando un rilievo viene visto dalla massima distanza a cui il suo profilo è ancora definito (60 km), esso risulta più basso di 250 metri (per esempio, il Monte Bianco risulta 4.558 metri invece che 4.808 metri).

37 In questo caso, per esempio, il Sole tramonta 6° più a ovest.

38 Avrete notato che le montagne sono illuminate quando in pianura è scuro (in alto tramonta dopo e albeggia prima), ma è più difficile notare che ciò capita in misura maggiore verso i poli, e in estate. E' l'effetto opposto di quello cui si assiste quando l'orizzonte, verso est o verso ovest, è ostruito, per esempio, dalle montagne, caso in cui alba e tramonto avvengono invece dopo e prima, rispettivamente; quindi l'innalzarsi rispetto all'orizzonte è equivalente a delle "montagne al negativo" (l'angolo di cut-off dell'altezza del Sole è negativo invece che positivo).

39 Quasi come nell'impero di Carlo V d'Asburgo ("Sul mio regno non tramonta mai il Sole") i cui estremi distavano però più di 180° in longitudine: questa stringente condizione può essere rilassata mano a mano che si sale in quota (al piccolo principe basta muoversi poco (non certo di 180° in longitudine!) per riuscire a vedere sempre il Sole).

Passiamo ora al caso *dinamico*. Dalla (0), ponendo: *s* = *s*(lat. = cost., long. = cost., alt.) estraiamo la[40]:

$$\Delta h_{Sole}(\delta_{Sole}, \text{raggio pianeta, lat., long., rifrazione}) = \int_{t1}^{t2} [v_{oss., lungo\,raggio} \cdot (\partial h_{Sole} / \partial alt.)] \cdot dt \qquad (2)$$

dove la dipendenza dal raggio del pianeta è presente se il tramonto è rispetto allo sferoide di riferimento (tramonto "mobile"). Teniamo in mente la solita condizione (qui nella forma angolare):

$$\Delta h_{Sole}(\delta_{Sole}, \text{raggio pianeta, lat., rifrazione}) > \text{altezza diametro}_{disco\ solare} \qquad (2\ bis)$$

Esaminiamo ora alcuni esempi, ancora sul pianeta Terra. Consideriamo sempre solo il tramonto, che fa tanto illanguidire il piccolo principe quando è triste. Come nel caso degli spostamenti paralleli allo sferoide di riferimento, anche in questo caso l'obiettivo di anticipo dell'ora è sempre garantito: con qualsivoglia velocità discensionale, anche molto bassa, l'anticipo è quello calcolato qui sopra negli esempi statici (non si riesce a vedere il tramonto a Parigi *stando*[41] negli Stati Uniti[42]).

Invece, per valutare la possibilità di tramonti pluri-giornalieri, dobbiamo tenere conto di quanto tempo impieghiamo a salire di quota, per valutare, al netto di questo ritardo, se vi è, e quanto vale, il guadagno temporale sul tramonto.

I *tempi* guadagnati con l'altitudine ottenuti nei pochi esempi statici, visti, si è portati a concludere che, sulla Terra, considerando varie modalità ascensionali a propulsione umana o con il volo libero, è estremamente improbabile[43] riuscire a vedere più di un tramonto in un giorno. Infatti a basse latitudini ci si mangia quasi tutto il vantaggio. Però, alle latitudini più elevate, il vantaggio aumenta e il tramonto è anche più lento, e quindi, specialmente ai solstizi, si può ottenere un buon vantaggio, e negli esempi ci si è fermati a 60°... . A 60° di latitudine, salendo a 1000 m, agli equinozi si guadagnano, come visto, 8 minuti, contro una durata del tramonto di circa 4,5 minuti, quindi il tempo di ascesa deve essere di 3,5 minuti al massimo: troppo poco; in estate però le cose migliorano, e si può vederne un altro completo se l'ascensione è compiuta in 6 minuti (derivanti dal vantaggio di 15 minuti e dalla durata del tramonto di 9 minuti): impossibile inerpicandosi a piedi o in bicicletta, estremamente impro-

40 Se torniamo al caso statico, con questa espressione si può calcolare la correzione da apportare alle condizioni per avere alba (visibilità) e tramonto di una stella derivabili dalla (1) (con h_{occhio} = 0 m) quando l'osservatore è alto rispetto al raggio del pianeta: per vedere il tramonto, non basta che il piccolo principe rispetti la condizione: lat. N/S ≤ (90° -/+ δ_{Sole}) perché essa (che va a definire i circoli polari) è valida solo per h_{occhio} = 0 m (si veda la Nota 49 e anche la 39).

41 Nel caso di spostamento puramente "verticale", non bisognerebbe, come fa il piccolo principe, partire dagli Stati Uniti, ma basterebbe abbassarsi, rimanendo negli Stati Uniti.

42 Il piccolo principe, per farsi capire dall'aviatore, usa un esempio terrestre (New York e Parigi), ma tra le due città c'è una differenza di longitudine di 76° circa e quindi una differenza di orario (locale) di circa 5 ore, anticipo che, con un movimento puramente "verticale", non sarebbe possibile, per esempio, su 612 Veronika perché l'anticipo, con movimenti puramente "verticali", può, al massimo, essere di circa la metà del periodo di rotazione, ossia di 8 / 2 = 4 ore. Su B612 nulla possiamo dire, ma, essendo una favola, di sicuro esso avrà una rotazione molto lenta per permettere al piccolo principe, sedendosi, di anticipare il tramonto di 5 ore o più!

43 ma si veda più avanti il risultato a sorpresa.

babile con il deltaplano o l'aliante[44]. Solo se si accetta l'inquinamento e l'ausilio di un bruciatore, una mongolfiera che parta dalla spiaggia subito dopo il tramonto, potrebbe permettere, alla fine della rapida ascensione, di osservare, con le orecchie tappate, un secondo tramonto: si potrebbe dire, a quelli sulla spiaggia: « Vado su perché, come il piccolo principe, ho bisogno di vedere immediatamente, dopo questo, un altro splendido tramonto ». Quindi anche sul pianeta Terra, già a 60° di latitudine, può succedere qualcosa di simile a ciò che il piccolo principe riesce a fare alzandosi dalla sedia o spostandola "indietro", ma a patto di usare un mezzo inquinante, e con margini strettissimi.

Ma valutiamo anche il caso, molto "favolistico", in cui, semplicemente, da sdraiati ci solleviamo in piedi, o viceversa.

Considerando sempre tramonti rispetto a orizzonti con altitudine zero, già dal solo esempio statico sull'ascensione a 1000 metri possiamo desumere che sulla Terra, purtroppo, non possiamo semplicemente alzarci o abbassarci sulla sedia: non si tratta infatti adesso di una questione di velocità di ascensione, ma di scarsa ampiezza *angolare* guadagnata sull'altezza del Sole (stavolta conviene ragionare sull'angolo piuttosto che sul vantaggio temporale): se con 1000 metri riusciamo a guadagnare solo circa il doppio dell'altezza del disco solare, per cui con 1 metro guadagniamo quasi nulla. Per una prova numerica, torniamo tuttavia a ragionare sui tempi e consideriamo il caso di quando ci troviamo all'equatore, i giorni degli equinozi: (alba e) tramonto avvengono prima e dopo, o viceversa, di appena 10 secondi circa. Con un tempo per cambiare postura, diciamo, intorno a un paio di secondi, abbiamo un guadagno netto intorno agli 8 secondi. Se ci abbassiamo, il "tramonto" aggiuntivo è molto parziale[45]: sia l'anticipo che l'"aggiunta" non sono notabili a occhio, oltre ad essere inferiori al margine di incertezza dei calcoli, che è intorno al minuto[46].

Il piccolo principe, invece, sul suo piccolo pianeta, potrebbe ottenere (ma, essendo una favola, di sicuro ottiene) un largo anticipo sull'ora del tramonto, oppure vedere più tramonti completi al giorno…

...semplicemente abbassandosi o alzandosi completamente dalla sedia, o addirittura, abbassandosi e alzandosi progressivamente a scatti[47], e quindi, facendolo ripetutamente, *genera-*

44 Si dovrebbero incontrare forti e favorevoli correnti ascensionali, ma comunque essi sono poco rappresentativi del caso di velocità puramente ascensionale.

45 Infatti la durata del tramonto sulla Terra, dalla quale il diametro sotteso dal disco solare vale circa, in media durante l'anno, mezzo grado, ha, come già visto, un valore, all'equatore e vicino agli equinozi, intorno ai 2 minuti, che è il suo minimo. Se consideriamo altre latitudini alle quali avviene ancora il tramonto completo (ossia il disco solare, a mezzodì, si trova tutto sopra l'orizzonte) si riesce, alzandosi, ad anticipare la visione del tramonto più di questi 8 secondi, ma la durata del tramonto aumenta e rimane sempre molto distante (come detto, conviene ragionare sul vantaggio angolare) per cui, anche a latitudini elevate, non se ne può vedere un altro in modo completo.

46 Si veda Nota 19.

47 Ma deve stare attento a non muoversi durante i tramonti, a meno che non voglia accelerarli o rallentarli (per esempio, se si alza durante, può allungarli).

re tramonti e albe completi, ossia deciderne la durata, funzione della velocità con cui si abbassa[48], e battere il suo record di 43 in un giorno[49].

Questi sono consigli per il piccolo principe, se egli ha fatto ritorno sul suo piccolo pianeta.

Ma torniamo qui sulla Terra. Se alzarci e abbassarsi sulla sedia porta vantaggi minimi anche a latitudini elevate, proviamo comunque a spingerci a latitudini molto elevate e a scendere di quota, posizionandoci vicino ad un polo in un periodo dell'anno in cui il Sole si trova vicino all'orizzonte[50]: caro principe, anche qui sulla Terra possiamo *generare* tramonti, e senza fretta, con il tempo per gustarci il lungo tramonto da noi generato, ripetendo le salite/discese in quota finché il Sole non rispunta sopra l'orizzonte per causa "naturale"[51], e fintanto che ne abbiamo le forze...

Ma qui, sulla Terra, che tramonti unici!

Perché, piccolo principe, non hai parlato della straziante bellezza dei tramonti terrestri? D'accordo, come abbiamo visto è difficile vederne più di uno in un giorno o anticiparne in modo consistente la visione (dobbiamo quindi aspettare il naturale corso delle cose), ma che differenza rispetto a quelli su B612! Durano di più[52], il Sole è più grande, e solo qui sono colorati[53]: si tingono di tutte le tonalità del rosso, e terminano nel crepuscolo[54]…

48 Facendo riferimento alla prima parte di questo testo, dove si osservava che si può far muovere un Sole immobile, si può aggiungere che, in particolare, è possibile generare tramonti.

49 Fino a quando il Sole non scende o sale troppo rispetto all'orizzonte (durante il giorno, oppure, da ultimo, per via del moto di rivoluzione), il che capita tutti i giorni dell'anno se non ci si trova oltre una latitudine che è pari a quella dei circoli polari (i quali sono presenti su qualunque pianeta perché il piano equatoriale e quello orbitale non sono mai perfettamente coincidenti) a cui va sottratto l'angolo tra questi due piani, il quale deve essere maggiore della semi-ampiezza "verticale" del disco solare sottesa al punto di osservazione. Si noti che queste considerazioni, e quindi, in particolare, la definizione di circoli polari, sono per h_{occhio} = 0 m, e quindi molto imprecise nel caso del piccolo principe sul suo pianetino! Si veda la Nota 40 e anche la 39.

50 Tutto sotto, quando visto con $h_{occhio, 2}$ = altitudine di osservazione all'arrivo = 0 m.

51 Causa il moto di rivoluzione.

52 Su 612 Veronika, per esempio, con un periodo di rotazione tre volte più corto di quello terrestre, e un diametro del disco solare, a causa della maggior distanza dal Sole, circa 3 volte più piccolo (media sull'anno), la durata media del tramonto, a parità degli altri parametri (latitudine, δ_{Sole}, ecc.) (e laddove il tramonto avviene) è circa 9 volte inferiore. Inoltre, vista l'elevata eccentricità della sua orbita (e = 0.259) rispetto a quella della Terra (e = 0.0167), la durata del tramonto è influenzata, seppur leggermente, anche dalla variazione del diametro solare (variazione che arriva ad essere di circa il 3,5% nel corso dell'anno).

53 Grazie alla dispersione dell'indice di rifrazione dell'atmosfera terrestre, variabile in funzione della sua temperatura, pressione, umidità relativa. Si noti anche che l'atmosfera cambia il cielo diurno che, causa la diffusione, risulta luminoso e non permette di vedere le altre stelle (sugli asteroidi si vede il cielo stellato anche di giorno se ci si scherma dalla luce solare (diretta)).

54 A pagina 34 dell'edizione citata, il piccolo principe parla erroneamente di crepuscolo sul suo pianetino, prova che Saint-Exupéry ne era affascinato...

ADDENDUM: un finale da favola

Nell'analisi precedente sui movimenti verticali abbiamo fatto l'ipotesi di guardare il tramonto che si sposta sul mare o su una pianura, ossia rispetto ad un orizzonte (qui la superficie dell'ellissoide di riferimento) che si sposta secondo la curvatura del pianeta[55] (è il caso delle (1 ter) e (1 quater), le quali dipendono dal raggio del pianeta).

Ma possiamo svincolarci dalla dipendenza dal raggio del pianeta se scegliamo di vedere il tramonto dietro un ostacolo (naturale o artificiale) sufficientemente alto in modo che esso costituisca un singolo orizzonte che non si muove al variare di h_{occhio}[56], e allora sulla Terra è come stare sul pianetino B612: possiamo semplicemente alzarci per vedere un secondo tramonto!

Vediamo come[57]:

Nel tentativo di continuare a vedere un tramonto con il Sole il più basso possibile (ossia con elevazione il più possibile vicina a 0°) per vederlo in tutta la sua ricchezza cromatica, come capita nei tramonti sul mare, nella figura seguente scegliamo 0° come angolo di elevazione del Sole al tramonto quando siamo sdraiati ($h_{occhio,\,0}$ = 0 m) (→ l'angolo di cut-off determinato dall'ostacolo, $\alpha_{ostacolo}$, è 0°); ne deriverà una certa altezza dell'ostacolo/orizzonte, $t > 0$, variabile a seconda della sua distanza, s (o d)

55 O, più in generale, proporzionalmente ad essa.

56 La formula (2) non ha più dipendenza dal raggio del pianeta, ossia l'angolo di cut-off dell'altezza del Sole non dipende dal raggio del pianeta, ma dalla distanza e altezza dell'orizzonte rispetto all'occhio dell'osservatore.

57 Si tratta sempre di teoria delle ombre, ma il caso del movimento di un'ombra gettata da una sfera si semplifica in quella gettata da uno spigolo.

Quando l'occhio si innalza (ossia ci alziamo), il fatto di avere messo l'ostacolo alto t fa sì che l'angolo di cut-off da esso determinato, $\alpha_{ostacolo}$, sia maggiore di quello se il tramonto avvenisse sul mare, $\alpha_{centro\ della\ Terra}$.

Affinché nel passare dallo sdraiati ($h_{occhio,\,0}$ = 0 m) all'impiedi ($h_{occhio,\,1}$ = 1,5 m) si veda un secondo tramonto, imponiamo che con $h_{occhio,\,1}$ si abbia $\alpha_{ostacolo}$ = 0,5°, e calcoliamo la distanza massima, $s_{massimo}$, a cui deve trovarsi l'ostacolo:

$1{,}5\ m = s_{massimo} \cdot tg(0{,}5°) \rightarrow s_{massimo} = 171\ m$[58]

L'altezza minima dell'ostacolo, t_{minimo} , deve essere di:

$\alpha_{centro\ della\ Terra} = arctg(s_{massimo}/r)$ = circa 0,00135°, quindi: $t_{minimo} = (r_{Terra,\,lat.}/cos0{,}5°) - r_{Terra,\,lat.} \cong$ 1,78 mm.

Interpretiamo i calcoli e rendiamoli più realistici.

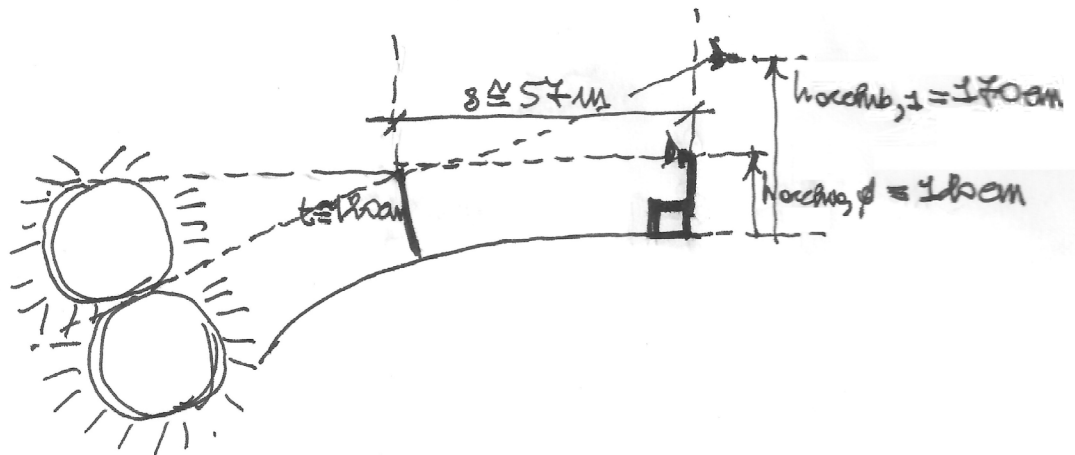
Abbiamo visto che se vogliamo vedere un tramonto con il Sole molto basso, in teoria a 0° di altezza, dobbiamo scegliere come orizzonte un ostacolo naturale (o uno artificiale, per esempio un muro) di altezza irrisoria (1,78mm) (quella che recupera la curvatura terrestre a 171 metri di distanza), posizionato a (non più di) 171 metri in linea d'aria da noi; ma dovremmo anche, sdraiandoci, mettere il nostro occhio rasoterra ($h_{occhio,\,0}$ = esattamente a 0 m). Per un caso più realistico, possiamo assumere, per esempio, i seguenti dati:

$h_{occhio,\,0}$ = 120 cm (siamo seduti su di una sedia)
$h_{occhio,\,1}$ = 170 cm (ci siamo alzati dalla sedia)
$\rightarrow s_{massimo}$ = 57,3 m

L'altezza dell'ostacolo deve essere di circa:

t_{minimo}= 120 cm

Perdiamo poco più di 1° sul tramonto (l'angolo di cut-off sull'altezza del Sole vale +1,2°) quindi poche tonalità di rosso rispetto al tramonto teorico visto con l'occhio rasoterra (angolo di cut-off sull'altezza del Sole di 0°). [Il tempo per alzarsi lo abbiamo sempre considerato trascurabile (rispetto alla durata del tramonto]. Ecco un disegno per questo esempio:

58 Si noti che è minore di 250 m, vedasi anche Nota 36.

Anche noi possiamo alzarci dalla sedia. Provare per credere.

[...sogno]

Ringraziamenti

Desidero ringraziare Pier Franco Nali per avermi segnalato una inesattezza e la necessità di un'aggiunta dopo la sua attenta lettura della terza revisione.